14.1

1 Sieg Heimmannschaft
0 Unentschieden
2 Sieg Auswärtsmannschaft

Beispiele für Tipps: 2 1 1 0 2 0 2 1 1 2
1 0 0 2 1 1 0 2 0 2
⋮

$k = 10$ mal aus $n = 3$ Elementen
Reihenfolge spielt Rolle, mit Wiederholung
Variationen mit Wiederholung

$$m = n^k = 3^{10} = 59049$$

14.2

Beispiele für Tipps:

5 2 11
6 1 8
3 12 4
⋮

Reihenfolge spielt eine Rolle
ohne Wiederholung

Variationen ohne Wiederholung

$k = 3$ mal aus $n = 12$ Elementen

$$m = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 10 \cdot 11 \cdot 12 = 1320$$

14.3

Beispiele für Begegnungen:

1 2   2 3
1 3   2 4
1 4   2 5
⋮   ⋮

$n = 10$ Elemente
$k = 2$ aus $n = 10$ Elementen

$$m = \binom{n}{k} = \binom{10}{2} = 45$$

ohne Wiederholung
Reihenfolge spielt keine Rolle
Kombinationen ohne Wiederholung

14.4 a)

$k = 5$ aus $n = 52$ Elementen, Reihenfolge spielt keine Rolle, ohne Wiederholung. Kombinationen ohne Wiederholung

$$m = \binom{n}{k} = \binom{52}{5} = 2\,598\,960$$

b) Es gibt $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten, 2 Asse aus 4 Assen auszuwählen

(Kombinationen ohne Wiederholung)

Es gibt $\binom{48}{3}$ Möglichkeiten, 3 Nicht-Asse aus 48 Nicht-Assen auszuwählen

(Kombinationen ohne Wiederholung)

Zu jeder Auswahl von 2 Assen gibt es $\binom{48}{3}$ Möglichkeiten für die Auswahl von 3 Nicht-Assen

$\Rightarrow$ Es gibt $\binom{4}{2}\binom{48}{3} = 103\,776$ Pokerblätter mit 2 Assen

14.5 Beispiele für PINs, bei denen zweimal die 2 vorkommt:

2 2 5 7	Permutationen mit Wiederholung mit $n = 4$ und $k = 3$ Klassen
2 5 7 2	Anzahl der Elemente der ersten Klasse: $n_1 = 2$
7 5 2 2	Anzahl der Elemente der zweiten Klasse: $n_2 = 1$
⋮	Anzahl der Elemente der dritten Klasse: $n_3 = 1$

Anzahl der PINs, bei denen zweimal die 2 vorkommt: 12

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!} = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2} = 12$$

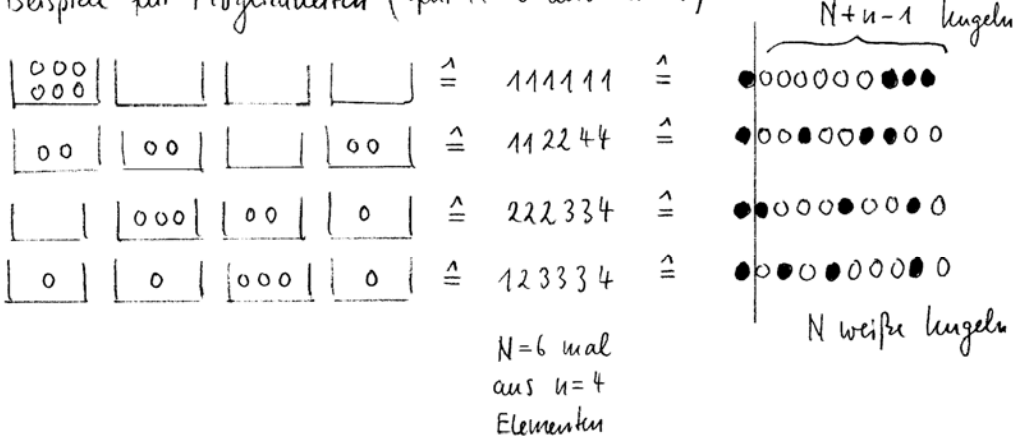
Anzahl der PINs, bei denen zweimal die 5 vorkommt: 12

Anzahl der PINs, bei denen zweimal die 7 vorkommt: 12

Insgesamt $3\cdot 12 = 36$ Möglichkeiten

14.6

Beispiele für Möglichkeiten (für $N=6$ und $n=4$)



Kombinationen mit Wiederholung N mal aus n Elementen

$$m = \binom{n+N-1}{N}$$

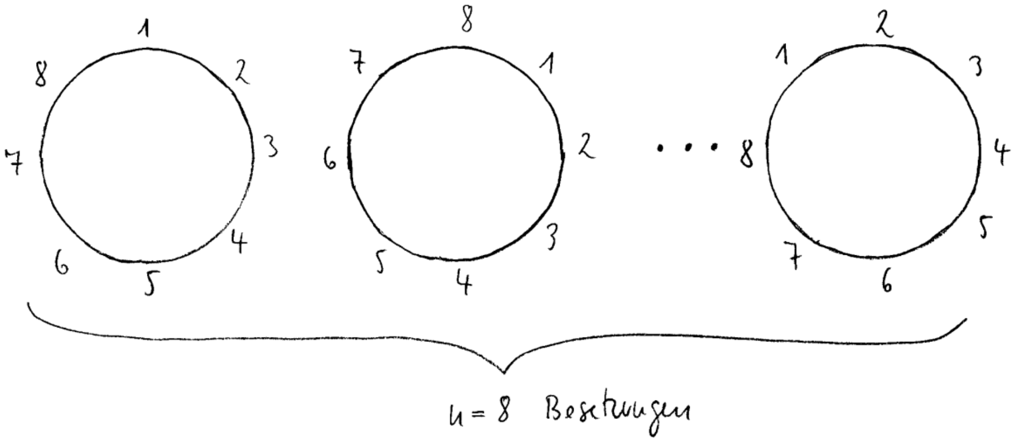
mit Wiederholung
Reihenfolge spielt keine Rolle
(verschiedene Reihenfolgen stellen gleiche Verteilung dar)

Permutationen von $n+N-1$ Elementen mit Wiederholung
2 Klassen
In einer Klasse sind N Elemente

$$m = \binom{n+N-1}{N}$$

14.7

Beispiele für verschiedene Besetzungen zu einer Tischordnung (für $n=8$)



Zu einer Tischordnung gibt es n Besetzungen

Anzahl der Besetzungen ist Anzahl m der Tischordnungen mal n

$$n! = m \cdot n \qquad m = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

14.8

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

a) $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

b) $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

c) $\frac{17}{36}$

14.9

Anordnungsplatz bedeutet Stelle beim Fahrzeug
Nummer bedeutet Stelle im letzten Jahr. Möglichkeiten insgesamt:

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

4! = 24 Anordnungen von 4 Elementen (Permutationen ohne Wiederholung)
Eine umrandete Zahl stellt einen Reifen dar, der sich an der gleichen Stelle befindet wie im letzten Jahr

Kein Reifen am alten Platz: 9 Möglichkeiten
Ein Reifen am alten Platz: 8 Möglichkeiten
Zwei Reifen am alten Platz: 6 Möglichkeiten
Vier Reifen am alten Platz: 1 Möglichkeiten

a) $\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

b) $\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$

c) $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{24}$

e) $1-\frac{9}{24}=\frac{5}{8}$

14.10 a)

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$
$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = 0{,}1$$

b)

$$P(A) = P(A\cap\Omega) = P(A\cap(B\cup\bar{B})) = P((A\cap B)\cup(A\cap\bar{B}))$$
$$= P(A\cap B) + P(A\cap\bar{B})$$
$$P(A\cap\bar{B}) = P(A) - P(A\cap B) = P(A) - (P(A) + P(B) - P(A\cup B))$$
$$= P(A\cup B) - P(B) = 0{,}3$$

c)

$$P(B) = P(B\cap(A\cup\bar{A})) = P((B\cap A)\cup(B\cap\bar{A})) = P(B\cap A) + P(B\cap\bar{A})$$
$$= P(\bar{A}\cap B) + P(A\cap B)$$
$$P(\bar{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B) = P(B) - (P(A) + P(B) - P(A\cup B))$$
$$= P(A\cup B) - P(A) = 0{,}1$$

d) $$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 0{,}5$$

e) $$P(A\cup\bar{B}) = P(\overline{\bar{A}\cap B}) = 1 - P(\bar{A}\cap B) = 0{,}9$$

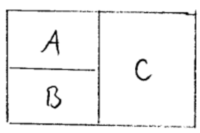
f) $$P(\bar{A}\cup B) = P(\overline{A\cap\bar{B}}) = 1 - P(A\cap\bar{B}) = 0{,}7$$

g) $$P(\bar{A}\cup\bar{B}) = P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(A\cap B) = 0{,}9$$

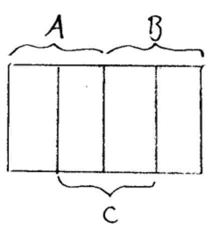
h) $$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = 0{,}25$$

i) $$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\bar{B})} = \frac{1 - P(A\cup B)}{1 - P(B)} = 0{,}625$$

14.11 a) möglich



b) möglich



c) nicht möglich, weil $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A) \le P(A)$ sein muss

c) Aus $A \cup B \cup C = \Omega$ folgt

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) = 1$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) + P(C) = 1 + P((A \cup B) \cap C) \geq 1$$

Dies ist bei den gegebenen Werten nicht der Fall $\Rightarrow$ nicht möglich

14.12

Beispiele für mögliche Ergebnisse: 3 6 1 5 2 4

1 3 6 4 5 2

⋮

Variationen, $k=6$ mal aus $n=6$ Elementen

Ergebnisse mit verschiedenen Zahlen: ohne Wiederholung $\frac{n!}{(n-k)!} = 6!$

Alle Ergebnisse: mit Wiederholung $n^k = 6^6$

$$\frac{6!}{6^6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0{,}0154$$

14.13

A: mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag

$\bar{A}$: alle an verschiedenen Tagen

Beispiele für mögliche Ergebnisse: $\underbrace{365 \quad 2 \quad 24 \quad 201 \quad \cdots \quad 64}_{}$ (n Zahlen)

24 12 1 114 $\cdots$ 364

⋮

Variationen

n mal aus $N = 365$ Elementen

Ergebnisse mit verschiedenen Tagen: ohne Wiederholung $\frac{N!}{(N-n)!} = \frac{365!}{(365-n)!}$

Alle Ergebnisse: mit Wiederholung $N^n = 365^n$

$$P(\bar{A}) = \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365}$$

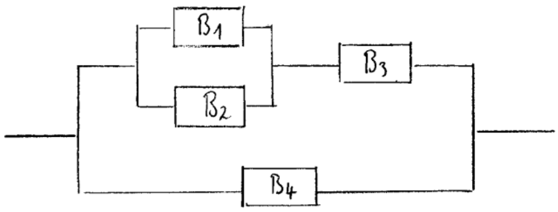
$$= 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{(365-n+1)}{365}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n} = \frac{\binom{365}{n} n!}{365^n}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{365}{n} n!}{365^n} = 1 - \binom{365}{n} \frac{n!}{365^n}$$

Bsp.: $n = 50$ $\quad P(A) = 1 - \binom{365}{50} \frac{50!}{365^{50}} = 0{,}97$

14.14



$p_1 = P(A_1) = 0{,}2$

$p_2 = P(A_2) = 0{,}25$

$p_3 = P(A_3) = 0{,}05$

$p_4 = P(A_4) = 0{,}1$

$A_{12} = A_1 \cap A_2 \qquad A_{123} = A_{12} \cup A_3 \qquad A = A_{123} \cap A_4$

$p_{12} = P(A_{12}) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = p_1 p_2 = 0{,}05$

$$p_{123} = P(A_{123}) = P(A_{12} \cup A_3) = P(A_{12}) + P(A_3) - P(A_{12} \cap A_3)$$
$$= P(A_{12}) + P(A_3) - P(A_{12})P(A_3) = p_{12} + p_3 - p_{12} \cdot p_3 = 0{,}0975$$

$P(A) = P(A_{123} \cap A_4) = P(A_{123})P(A_4) = p_{123} \cdot p_4 = 0{,}00975$

14.15

$P(\text{mindestens ein Mädchen}) = 1 - P(\text{kein Mädchen})$

$= 1 - \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{n \text{ mal}} = 1 - p^n \quad \text{mit } p = 0{,}51$

$1 - 0{,}51^n \geq 0{,}9 \qquad 0{,}51^n \leq 0{,}1 \qquad \ln(0{,}51^n) \leq \ln(0{,}1)$

$n \ln(0{,}51) \leq \ln(0{,}1) \qquad n \geq \dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}51)} = 3{,}42 \qquad \Rightarrow n \geq 4$

14.16

$1\overline{G}$ bedeutet: Bei der ersten Ziehung kein Gewinn

$2\overline{G}$ bedeutet: Bei der zweiten Ziehung kein Gewinn

$1G_1$ bedeutet: Bei der ersten Ziehung nur Gewinn 1

$1G_2$ bedeutet: Bei der ersten Ziehung nur Gewinn 2

$1G_{12}$ bedeutet: Bei der ersten Ziehung Gewinn 1 und Gewinn 2

$2G_1$ bedeutet: Bei der zweiten Ziehung nur Gewinn 1

$2G_2$ bedeutet: Bei der zweiten Ziehung nur Gewinn 2

$2G_{12}$ bedeutet: Bei der zweiten Ziehung Gewinn 1 und Gewinn 2

		Y: 0	1	2	
X	0	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$p_{1\bullet}$
	1	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$p_{2\bullet}$
	2	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$p_{3\bullet}$
		$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$p_{\bullet 3}$	

$$p_{11} = P(1\overline{G} \cap 2\overline{G}) = P(1\overline{G})\,P(2\overline{G} \mid 1\overline{G})$$
$$= \frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19} = \frac{91}{190}$$

$$p_{33} = P(1G_{12} \cap 2G_{12}) = P(1G_{12}) \cdot P(2G_{12} \mid 1G_{12})$$
$$= \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{19} = \frac{1}{190}$$

$$p_{12} = P\big((1G_2 \cap 2\overline{G}) \cup (1\overline{G} \cap 2G_2)\big) = P(1G_2 \cap 2\overline{G}) + P(1\overline{G} \cap 2G_2)$$

$$= P(1G_2)P(2\overline{G}|1G_2) + P(1\overline{G})P(2G_2|1\overline{G})$$

$$= \frac{2}{20}\cdot\frac{14}{19} + \frac{14}{20}\cdot\frac{2}{19} = \frac{14}{95} \qquad \text{ebenso } p_{21} = \frac{14}{95}$$

$$p_{13} = P(1G_2 \cap 2G_2) = P(1G_2)P(2G_2|1G_2) = \frac{2}{20}\cdot\frac{1}{19} = \frac{1}{190} \qquad \text{ebenso } p_{31} = \frac{1}{190}$$

$$p_{22} = P\big((1G_{12} \cap 2\overline{G}) \cup (1\overline{G} \cap 2G_{12}) \cup (1G_1 \cap 2G_2) \cup (1G_2 \cap 2G_1)\big)$$

$$= P(1G_{12} \cap 2\overline{G}) + P(1\overline{G} \cap 2G_{12}) + P(1G_1 \cap 2G_2) + P(1G_2 \cap 2G_1)$$

$$= P(1G_{12})P(2\overline{G}|1G_{12}) + P(1\overline{G})P(2G_{12}|1\overline{G}) + P(1G_1)P(2G_2|1G_1) + P(1G_2)P(2G_1|1G_2)$$

$$= \frac{2}{20}\cdot\frac{14}{19} + \frac{14}{20}\cdot\frac{2}{19} + \frac{2}{20}\cdot\frac{2}{19} + \frac{2}{20}\cdot\frac{2}{19} = \frac{16}{95}$$

$$p_{23} = P\big((1G_{12} \cap 2G_2) \cup (1G_2 \cap 2G_{12})\big) = P(1G_{12} \cap 2G_2) + P(1G_2 \cap 2G_{12})$$

$$= P(1G_{12})P(2G_2|1G_{12}) + P(1G_2)P(2G_{12}|1G_2)$$

$$= \frac{2}{20}\cdot\frac{2}{19} + \frac{2}{20}\cdot\frac{2}{19} = \frac{2}{95} \qquad \text{ebenso } p_{32} = \frac{2}{95}$$

$$p_{1\bullet} = p_{11} + p_{12} = p_{13} = \frac{91}{190} + \frac{14}{95} + \frac{1}{190} = \frac{12}{19} = f(0)$$

$$p_{2\bullet} = p_{21} + p_{22} + p_{23} = \frac{14}{95} + \frac{16}{95} + \frac{2}{95} = \frac{32}{95} = f(1)$$

$$p_{3\bullet} = p_{31} + p_{32} + p_{33} = \frac{1}{190} + \frac{2}{95} + \frac{1}{190} = \frac{3}{95} = f(2)$$

mit $f(x) = \dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

und $N = 20,\ M = 4,\ n = 2$

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{16}{2-x}}{\binom{20}{2}}$$

ebenso $p_{\bullet 1} = \frac{12}{19}$ $\quad p_{\bullet 2} = \frac{32}{95}$ $\quad p_{\bullet 3} = \frac{3}{95}$

		Y: 0	1	2	
X	0	$\frac{91}{190}$	$\frac{14}{95}$	$\frac{1}{190}$	$\frac{12}{19}$
	1	$\frac{14}{95}$	$\frac{16}{95}$	$\frac{2}{95}$	$\frac{32}{95}$
	2	$\frac{1}{190}$	$\frac{2}{95}$	$\frac{1}{190}$	$\frac{3}{95}$
		$\frac{12}{19}$	$\frac{32}{95}$	$\frac{3}{95}$	

14.17

A: Gerät defekt, d.h. mindestens ein Bauelement defekt

$\overline{A}$: Gerät nicht defekt, d.h. kein Bauelement defekt

$p = 0{,}001 \qquad q = 1 - p = 0{,}999$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \underbrace{q\cdot q\cdot q\cdot\ldots\cdot q}_{25\text{ Faktoren}} = 1 - q^{25} = 1 - 0{,}999^{25} = 0{,}0247$$

14.18

p Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauelement defekt ist

A: Gerät defekt $\quad P(A) = 0{,}007$

$\bar{A}$: Gerät nicht defekt $\quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0{,}993$

q Wahrscheinlichkeit, dass eine Lötstelle defekt ist $\quad q = 0{,}00002$

$$P(\bar{A}) = \underbrace{(1-p)(1-p)\cdot\ldots\cdot(1-p)}_{100 \text{ Faktoren}}\underbrace{(1-q)(1-q)\cdot\ldots\cdot(1-q)}_{300 \text{ Faktoren}} = (1-p)^{100}(1-q)^{300}$$

$$= (1-p)^{100}\, 0{,}99998^{300} = 0{,}993 \quad \text{auflösen nach } p$$

$$p = 1 - \sqrt[100]{\frac{0{,}993}{0{,}99998^{300}}} = 0{,}00001$$

14.19

B: Das gezogene Teil ist defekt

A_1: Das gezogene Teil wurde auf Maschine M_1 gefertigt

A_2: Das gezogene Teil wurde auf Maschine M_2 gefertigt

A_3: Das gezogene Teil wurde auf Maschine M_3 gefertigt

A_4: Das gezogene Teil wurde auf Maschine M_4 gefertigt

A_5: Das gezogene Teil wurde auf Maschine M_5 gefertigt

a)

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) + P(A_4)P(B|A_4) + P(A_5)P(B|A_5)$$
$$= 0{,}05\cdot 0{,}05 + 0{,}1\cdot 0{,}04 + 0{,}2\cdot 0{,}01 + 0{,}25\cdot 0{,}02 + 0{,}4\cdot 0{,}02 = 0{,}0215$$

b)

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}01}{0{,}0215} = 0{,}093$$

14.20

B: Es wird weiße Kugel gezogen

A_1: Es wird Behälter B_1 gezogen

A_2: Es wird Behälter B_2 gezogen

A_3: Es wird Behälter B_3 gezogen

A_4: Es wird Behälter B_4 gezogen

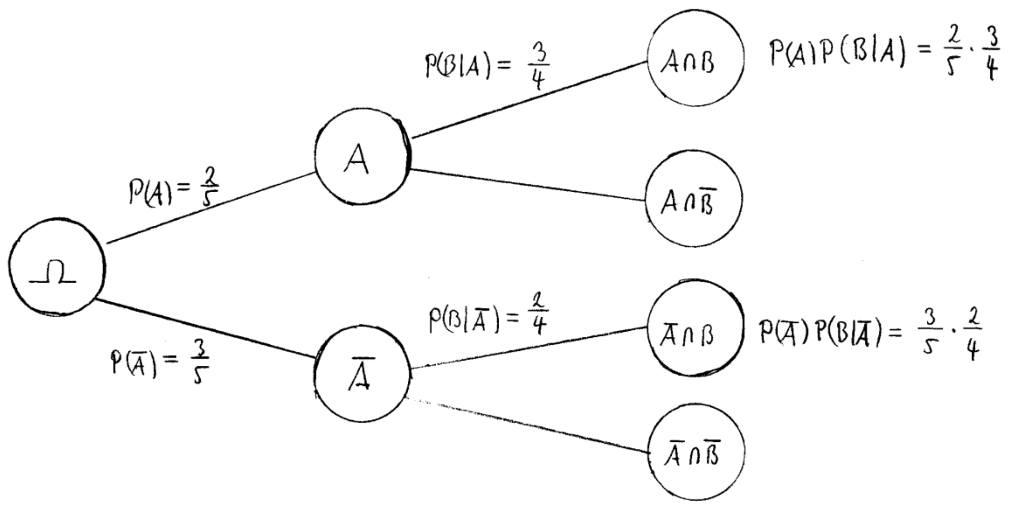
a)

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) + P(A_4)P(B|A_4)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{13}{24} \approx 0{,}54$$

b)

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{13}{24}} = \frac{4}{13} \approx 0{,}3$$

14.21



$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

14.22

A: Person hat Krankheit

$\bar{A}$: Person hat Krankheit nicht

B: Test positiv

$\bar{B}$: Test negativ

$P(A) = 0{,}005 \qquad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0{,}995$

$P(B|A) = 0{,}99 \qquad P(\bar{B}|\bar{A}) = 0{,}95 \qquad P(B|\bar{A}) = 1 - P(\bar{B}|\bar{A}) = 0{,}05$

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0{,}005 \cdot 0{,}99 + 0{,}995 \cdot 0{,}05 = 0{,}0547$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{0{,}005 \cdot 0{,}99}{0{,}0547} = 0{,}09$$

14.23 a) keine Verteilungsfunktion, da nicht monoton steigend

keine Dichte, da $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x > 1$

b) keine Verteilungsfunktion, da nicht monoton steigend

keine Dichte, da $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x > 1$

c) keine Verteilungsfunktion, da es Funktionswerte gibt, die größer als 1 sind

keine Dichte, da $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x > 1$

d) keine Verteilungsfunktion, da nicht monoton steigend

keine Dichte, da $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x > 1$

e) keine Verteilungsfunktion, da nicht monoton steigend

keine Dichte, da es negative Funktionswerte bzw. Zahlen a,b gibt mit $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x < 0$

f) keine Verteilungsfunktion, da nicht monoton steigend

keine Dichte, da $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x > 1$

g) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$, kann Dichte sein

h) von 0 auf 1 monoton steigend, kann Verteilungsfunktion sein

14.24 Die Zufallsvariable ist diskret, da höchstens *n* verschiedene Werte möglich sind

14.25 a)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = c\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\mu\to-\infty}\int\limits_{\mu}^{\lambda}\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= c\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\mu\to-\infty}\left[\arctan x\right]_{\mu}^{\lambda} = c\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\mu\to-\infty}(\arctan\lambda - \arctan\mu)$$

$$= c\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = c\pi = 1 \quad\Rightarrow\quad c = \frac{1}{\pi} \qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}$$

b)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\,\frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\mu\to-\infty}\int\limits_{\mu}^{\lambda}\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\mu\to-\infty}\left[\ln(1+x^2)\right]_{\mu}^{\lambda}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\mu\to-\infty}\left(\ln(1+\lambda^2)-\ln(1+\mu^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\lim_{\lambda\to\infty}\ln(1+\lambda^2) - \lim_{\mu\to-\infty}\ln(1+\mu^2)\right) \quad \text{Grenzwerte existieren nicht}$$

$\Longrightarrow$ Erwartungswert μ existiert nicht

c)

$\Rightarrow$ Varianz $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx$ existiert nicht

d)

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{\pi}\lim_{\mu\to-\infty}\int\limits_{\mu}^{x}\frac{1}{1+y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{\mu\to-\infty}\left[\arctan y\right]_{\mu}^{x} = \frac{1}{\pi}\lim_{\mu\to-\infty}(\arctan x - \arctan\mu)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right)$$

e)

$$P(-1\le X\le 1) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\arctan x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\arctan 1 - \arctan(-1)\right) = \frac{2}{\pi}\arctan 1 = \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

14.26 a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = c\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\mu\to-\infty}\int_{\mu}^{\lambda}\frac{1}{\cosh^2 x}\,dx$$

$$= c\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\mu\to-\infty}\left[\tanh x\right]_{\mu}^{\lambda} = c\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\mu\to-\infty}(\tanh\lambda-\tanh\mu) = c(1-(-1))$$

$$= 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \qquad f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cosh^2 x}$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\cosh^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\mu\to\infty}\int_{-\mu}^{\lambda}\frac{x}{\cosh^2 x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\mu\to\infty}\left[x\tanh x-\ln\cosh x\right]_{-\mu}^{\lambda} \qquad \text{s. Aufgabe 4.10 d)}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\mu\to\infty}\left(\lambda\tanh\lambda-\ln\cosh\lambda-(-\mu\tanh(-\mu)-\ln\cosh(-\mu))\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda\tanh\lambda-\ln\cosh\lambda)-\frac{1}{2}\lim_{\mu\to\infty}(\mu\tanh\mu-\ln\cosh\mu)$$

s. Aufgabe 4.10 d)

$$= \frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2 = 0 \qquad E(X) = 0$$

s. Aufgabe 3.13 k)

c)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\cosh^2 y}\,dy = \frac{1}{2}\lim_{\mu\to-\infty}\int_{\mu}^{x}\frac{1}{\cosh^2 y}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\mu\to-\infty}\left[\tanh y\right]_{\mu}^{x} = \frac{1}{2}\lim_{\mu\to-\infty}(\tanh x-\tanh\mu) = \frac{1}{2}(\tanh x+1)$$

d)

$$P(1\le X\le 2) = \int_{1}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{2}\frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\left[\tanh x\right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\tanh 2-\tanh 1) \approx 0{,}1012$$

14.27

$$\int x e^{-x^2}\,dx \qquad \text{Subst.}\quad -x^2 = u \quad \frac{du}{dx} = -2x \quad dx = -\frac{1}{2x}\,du$$

$$= -\int x e^{u}\frac{1}{2x}\,du = -\frac{1}{2}\int e^{u}\,du = -\frac{1}{2}e^{u} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c\int_0^{\infty} x e^{-x^2}\,dx = c\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda} x e^{-x^2}\,dx$$

$$= c\lim_{\lambda\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{\lambda} = c\lim_{\lambda\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-\lambda^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{c}{2} = 1$$

$$\Rightarrow c = 2$$

b) $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = 0 \quad \text{für } x \leq 0$$

Für $x > 0$ gilt $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \int_0^{x} f(y)\,dy$

$$= 2\int_0^{x} y e^{-y^2}\,dy = 2\left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_0^{x} = 2\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1-e^{-x^2} \qquad F(x) = \begin{cases} 1-e^{-x^2} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

c) $$P(0 \leq X < 1) = \int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 x e^{-x^2}\,dx$$

$$= 2\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = 2\left(-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}\right) = 1-\frac{1}{e} \approx 0{,}632$$

14.28

hypergeometrische Verteilung $\quad f(k) = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad N = 52 \quad M = 4, \quad n = 5$

$$f(k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{48}{5-k}}{\binom{52}{5}}$$

Bsp.: 2 Asse $\quad k = 2 \quad f(2) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} \approx 0{,}04$

14.29 a) $W = \{0,1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}_0$

b) $$P(X \leq n) = f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$$

$$= q^0 p + q^1 p + q^2 p + \ldots + q^n p$$

$$= p(1+q+q^2+\ldots+q^n) = p\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = p\,\frac{1-q^{n+1}}{p} = 1-q^{n+1}$$

$$F(n) = 1-(1-p)^{n+1}$$

c)

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k f(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k q^k p = p \sum_{k=0}^{\infty} k q^k = p \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} k q^k$$

$$= p \lim_{n\to\infty} \frac{q(1-q^n) - n q^{n+1}(1-q)}{(1-q)^2}$$ s. Aufgabe 1.7 g)

$$= p \lim_{n\to\infty} \frac{q(1-q^n) - n q^n q(1-q)}{(1-q)^2} = p \frac{q}{(1-q)^2}$$ s. Aufgabe 3.13 l)

$$= p \frac{q}{p^2} = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1$$

14.30 a)

X Anzahl der Jungen bis zum ersten Mädchen

$P(X=k) = f(k) = q^k p$ mit $p = 0{,}49$ und $q = 0{,}51$ s. Aufgabe 14.29

Anzahl Kinder = Anzahl Jungen + 1 = $X+1$

$X+1 > 5 \iff X > 4$

$$P(X>4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \big(f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)\big)$$

$$= 1 - (q^0 p + q^1 p + q^2 p + q^3 p + q^4 p) = 1 - p(1+q+q^2+q^3+q^4)$$

$$= 1 - p\frac{1-q^5}{1-q} = 1 - p\frac{1-q^5}{p} = 1-(1-q^5)$$ s. Aufgabe 14.29

$$= q^5 = 0{,}51^5 = 0{,}0345$$

b)

durchschnittliche Anzahl von Jungen: $E(X) = \frac{1}{p} - 1 \approx 1{,}041$

durchschnittliche Anzahl von Kindern: $E(X)+1 = \frac{1}{p} \approx 2{,}041$

14.31

	0	1	2	3	
0	0,1	0,05	0,1	0,05	0,3
1	0,15	0,15	0,05	0,05	0,4
2	0,05	0,1	0,05	0,1	0,3
	0,3	0,3	0,2	0,2	

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 = 1$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}2 = 1{,}3$$

$$E(XY) = 1 \cdot 0{,}15 + 2 \cdot 0{,}05 + 3 \cdot 0{,}05 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}05 + 6 \cdot 0{,}1 = 1{,}4$$

$$V(X) = (0-1)^2\, 0{,}3 + (1-1)^2\, 0{,}4 + (2-1)^2\, 0{,}3 = 0{,}6$$

$$V(Y) = (0-1{,}3)^2\, 0{,}3 + (1-1{,}3)^2\, 0{,}3 + (2-1{,}3)^2\, 0{,}2 + (3-1{,}3)^2\, 0{,}2 = 1{,}21$$

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = 1{,}4 - 1 \cdot 1{,}3 = 0{,}1$$

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}6}\sqrt{1{,}21}} = 0{,}117$$

14.32

X Anzahl der gezogenen Gewinne

$$P(X>5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(5) = 1 - \left(f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)\right)$$

$$f(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{mit } N = 10\,000 \quad M = 500 \quad n = 100 \qquad f(x) = \frac{\binom{500}{x}\binom{9500}{100-x}}{\binom{10\,000}{100}}$$

$$f(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \overset{N \geq 20n}{\approx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \underset{n > 1500p}{\overset{p \leq 0{,}1}{\approx}} \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

mit $p = \frac{M}{n}$ mit $\mu = np$

$$p = \frac{M}{N} = 0{,}05 \qquad \mu = np = 5$$

$$f(x) \approx \frac{5^x}{x!} e^{-5} = \frac{1}{e^5} \frac{5^x}{x!}$$

$$P(X>5) \approx 1 - \frac{1}{e^5}\left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!}\right) = 0{,}38404$$

Rechnung mit hypergeometrischer Verteilung ergibt $P(X>5) = 0{,}38395$

14.33

		$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	
X	0	$\frac{91}{190}$	$\frac{14}{95}$	$\frac{1}{190}$	$\frac{12}{19}$
	1	$\frac{14}{95}$	$\frac{16}{95}$	$\frac{2}{95}$	$\frac{32}{95}$
	2	$\frac{1}{190}$	$\frac{2}{95}$	$\frac{1}{190}$	$\frac{3}{95}$
		$\frac{12}{19}$	$\frac{32}{95}$	$\frac{3}{95}$	

$$E(X) = 1 \cdot \frac{32}{95} + 2 \cdot \frac{3}{95} = \frac{2}{5} = E(Y)$$

Erwartungswert einer hypergeometrischen Verteilung mit $N = 20,\ M = 4,\ n = 2$

$$E(X) = E(Y) = n\frac{M}{N} = 2 \cdot \frac{4}{20} = \frac{2}{5}$$

$$E(XY) = 1 \cdot \frac{16}{95} + 2 \cdot \frac{2}{95} + 2 \cdot \frac{2}{95} + 4 \cdot \frac{1}{190} = \frac{26}{95}$$

$$V(X) = \left(0 - \frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{12}{19} + \left(1 - \frac{2}{5}\right)^2 \frac{32}{95} + \left(2 - \frac{2}{5}\right)^2 \frac{3}{95} = \frac{144}{475} = V(Y)$$

Varianz einer hypergeometrischen Verteilung mit $N=20, M=4, n=2$

$$V(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1} = 2\frac{4}{20}\left(1 - \frac{4}{20}\right)\frac{20-2}{20-1} = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{18}{19} = \frac{144}{475}$$

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{26}{95} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{54}{475}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\frac{54}{475}}{\sqrt{\frac{144}{475}}\sqrt{\frac{144}{475}}} = \frac{\frac{54}{475}}{\frac{144}{475}} = \frac{54}{144} = \frac{3}{8}$$

14.34

$$f(x) = \binom{10}{x} 0{,}6^{x}\, 0{,}4^{10-x}$$

a) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \left(f(0) + f(1) + f(2) + f(3)\right) = 0{,}945$

b) $P(\leq 7) = 1 - P(X > 7) = 1 - \left(f(8) + f(9) + f(10)\right) = 0{,}833$

c) $E(X) = np = 10 \cdot 0{,}6 = 6 \qquad |X - 6| \leq 1 \iff 5 \leq X \leq 7$

$P(|X - E(X)| \leq 1) = f(5) + f(6) + f(7) = 0{,}666$

d) $P(X > 4 | X \leq 7) = \dfrac{P(5 \leq X \leq 7)}{P(X \leq 7)} = \dfrac{f(5) + f(6) + f(7)}{1 - \left(f(8) + f(9) + f(10)\right)} = 0{,}800$

14.35

$$f(x) = \frac{\binom{6}{x}\binom{4}{8-x}}{\binom{10}{8}} \qquad W = \{4, 5, 6\}$$

a) $P(X > 6) = 0$

b) $P(X \leq 6) = 1$

c) $E(X) = n\frac{M}{N} = 4{,}8 \qquad |X-4{,}8| \leq 1 \iff 4 \leq X \leq 5$

$P(|X-E(X)| \leq 1) = P(4 \leq X \leq 5) = f(4) + f(5) = \frac{13}{15}$

d) $P(X>2 | X<5) = \frac{P(2<X<5)}{P(X<5)} = \frac{P(X=4)}{P(X=4)} = 1$

14.36 $f(x) = \frac{6^x}{x!} e^{-6} = \frac{1}{e^6} \frac{6^x}{x!} \qquad E(X) = 6$

a) $P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (f(0) + f(1) + f(2))$

$= 1 - \frac{1}{e^6}(1+6+18) = 0{,}938$

b) $P(X \leq 6) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 0{,}606$

c) $P(|X-E(X)| \leq 2) = P(4 \leq X \leq 8) = f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) = 0{,}696$

d) $P(X>4 | X \leq 6) = \frac{P(4<X\leq 6)}{P(X \leq 6)} = \frac{f(5)+f(6)}{f(0)+f(1)+\ldots+f(6)} = 0{,}5289$

14.37 a) $P(X>105) = 1 - P(X \leq 105) = 1 - F(105) = 1 - \Phi\left(\frac{105-100}{16}\right) = 0{,}377$

b) $P(90 < X < 120) = F(120) - F(90) = \Phi\left(\frac{120-100}{16}\right) - \Phi\left(\frac{90-100}{16}\right)$

$= \Phi(1{,}25) - \Phi(-0{,}625) = \Phi(1{,}25) - (1 - \Phi(0{,}625)) = 0{,}628$

c) $P(X \leq 85) = F(85) = \Phi\left(\frac{85-100}{16}\right) = \Phi(-0{,}9375)$

$= 1 - \Phi(0{,}9375) = 0{,}174$

d) $P(X \geq 100 | X \leq 112) = \frac{P(100 \leq X \leq 112)}{P(X \leq 112)} = \frac{F(112) - F(100)}{F(112)}$

$= \frac{\Phi(0{,}75) - \Phi(0)}{\Phi(0{,}75)} = 0{,}353$

14.38 a) $P(X > x_0) = 1 - P(X \le x_0) = 0{,}4 \qquad P(X \le x_0) = 0{,}6$

$P(X \le x_0) = F(x_0) = \Phi\left(\frac{x_0 - 100}{16}\right) = 0{,}6 \qquad \frac{x_0 - 100}{16} = 0{,}253 \quad x_0 = 104$

b) $P(|X - 100| < d) = P(100 - d < X < 100 + d)$

$= F(100+d) - F(100-d) = \Phi\left(\frac{100 + d - 100}{16}\right) - \Phi\left(\frac{100 - d - 100}{16}\right)$

$= \Phi\left(\frac{d}{16}\right) - \Phi\left(-\frac{d}{16}\right) = \Phi\left(\frac{d}{16}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{d}{16}\right)\right) = 2\,\Phi\left(\frac{d}{16}\right) - 1 = 0{,}55$

$\Phi\left(\frac{d}{16}\right) = 0{,}775 \qquad \frac{d}{16} = 0{,}755 \qquad d = 12{,}08$

14.39 a) $P(X > 100) = 1 - P(X \le 100) = 0{,}8 \qquad P(X \le 100) = 0{,}2$

$P(X \le 100) = F(100) = \Phi\left(\frac{100 - \mu}{4}\right) = 0{,}2$

$\frac{100 - \mu}{4} = u_{0{,}2} = -u_{1-0{,}2} = -u_{0{,}8} = -0{,}84 \qquad \mu = 103{,}36$

b) $P(|X - 200| < 10) = P(190 < X < 210) = F(210) - F(190) = 0{,}8$

$\Phi\left(\frac{210 - 200}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{190 - 200}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{10}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)\right)$

$= 2\,\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}8 \qquad \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0{,}9 \qquad \frac{10}{\sigma} = 1{,}28 \quad \sigma = \frac{10}{1{,}28} = 7{,}81$

14.40

X_1 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$-verteilt mit $\mu_1 = 1000\,\Omega$ und $\sigma_1^2 = 156\,\Omega^2$

X_2 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$-verteilt mit $\mu_2 = 500\,\Omega$ und $\sigma_2^2 = 100\,\Omega^2$

$X = X_1 + X_2$ $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt mit $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 1500\,\Omega$

und $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 256\,\Omega^2 \qquad \sigma = 16\,\Omega$

$P(X \notin [1460\,\Omega, 1540\,\Omega]) = 1 - P(1460\,\Omega \le X \le 1540\,\Omega)$

$= 1 - \left(F(1540\,\Omega) - F(1460\,\Omega)\right)$

$= 1 - \left(\Phi\left(\frac{1540\,\Omega - 1500\,\Omega}{16\,\Omega}\right) - \Phi\left(\frac{1460\,\Omega - 1500\,\Omega}{16\,\Omega}\right)\right)$

$= 1 - \Phi(2{,}5) + \Phi(-2{,}5) = 1 - \Phi(2{,}5) + 1 - \Phi(2{,}5)$

$= 2 - 2\,\Phi(2{,}5) = 0{,}0124$

14.41 $Z = \ln X$ $N(\mu,\sigma^2)$-verteilt mit $\mu = 2$ und $\sigma^2 = 0{,}25$ $\sigma = 0{,}5$

$$P(10 \le X \le 20) = P(\ln 10 \le \ln X \le \ln 20) = P(\ln 10 \le Z \le \ln 20)$$

$$= F(\ln 20) - F(\ln 10) = \Phi\left(\frac{\ln 20 - 2}{0{,}5}\right) - \Phi\left(\frac{\ln 10 - 2}{0{,}5}\right)$$

$$= \Phi(1{,}99) - \Phi(0{,}605) = 0{,}2493$$

14.42 $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ mit $\lambda = \frac{1}{2}$

a)

$$P(1 \le X \le 3) = F(3) - F(1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\cdot 3} - \left(1 - e^{-\frac{1}{2}\cdot 1}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} = 0{,}383$$

b)

$$P(X \ge 2 \mid X \le 3) = \frac{P(2 \le X \le 3)}{P(X \le 3)} = \frac{F(3) - F(2)}{F(3)} = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}\cdot 3} - \left(1 - e^{-\frac{1}{2}\cdot 2}\right)}{1 - e^{-\frac{1}{2}\cdot 3}}$$

$$= \frac{e^{-1} - e^{-\frac{3}{2}}}{1 - e^{-\frac{3}{2}}} = 0{,}186$$

c)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(X \ge 2 - \Delta x \mid X \le 2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(2 - \Delta x \le X \le 2)}{\Delta x \; P(X \le 2)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(2) - F(2 - \Delta x)}{\Delta x \; F(2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - e^{-1} - \left(1 - e^{-\frac{1}{2}(2 - \Delta x)}\right)}{\Delta x \left(1 - e^{-1}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-1} \cdot e^{\frac{1}{2}\Delta x} - e^{-1}}{\Delta x \left(1 - e^{-1}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\frac{1}{2}\Delta x} - 1}{\Delta x (e - 1)}$$

$$= \frac{1}{e-1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\frac{1}{2}\Delta x} - 1}{\Delta x} \overset{\text{L'H.}}{=} \frac{1}{e-1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}\Delta x} = \frac{1}{2(e-1)} = 0{,}291$$

14.43 Durchschnittlich 480 Anrufe pro Stunde, d.h. 8 Anrufe pro Minute $\mu = 8$

$$f(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} = \frac{1}{e^8} \frac{8^x}{x!}$$

a)

$$P(X < 7) = P(X \le 6) = F(6) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 0{,}313$$

b)

$$P(X \ge 5) = 1 - P(X \le 4) = 1 - F(4) = 1 - \left(f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4)\right) = 0{,}900$$

14.44 Durchschnittlich 2 Reparaturen pro Tag $\mu = 2$

$$f(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} = \frac{1}{e^2} \frac{2^x}{x!}$$

a) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - (f(0) + f(1) + f(2) + f(3)) = 0{,}143$

b) m Anzahl der Leihwagen

Es soll gelten $P(X \leq m) \geq 0{,}95$

Wie groß muss m mindestens sein, damit dies der Fall ist?

ges.: kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $P(X \leq m) \geq 0{,}95$, d.h. mit $F(m) \geq 0{,}95$

$F(4) = 0{,}947$

$F(5) = 0{,}983$ $\Rightarrow$ mindestens 5 Leihwagen

14.45 X Anzahl der Patienten, bei denen das Medikament wirkt.

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

a) $n = 10$ $p = 0{,}75$ $f(x) = \binom{10}{x} 0{,}75^x \, 0{,}25^{10-x}$

$P(X \leq 7) = 1 - P(X > 7) = 1 - (f(8) + f(9) + f(10)) = 0{,}474$

b) $n = 10$ $f(x) = \binom{10}{x} p^x (1-p)^{10-x}$

Je größer p, umso größer die Wahrscheinlichkeit $P(X > 7)$

kleinstes p mit $P(X>7) \geq 0{,}7$ erhält man aus $P(X>7) = 0{,}7$

$$P(X>7) = f(8) + f(9) + f(10) = \binom{10}{8} p^8 (1-p)^2 + \binom{10}{9} p^9 (1-p)^1 + \binom{10}{10} p^{10} (1-p)^0$$

$$= 45 p^8 (1-p)^2 + 10 p^9 (1-p) + p^{10} = 0{,}7$$

numerische Lösung: $p = 0{,}8074$

c) Für große n ist $H = \frac{X}{n}$ näherungsweise $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt

mit $\mu = p$ und $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ $\quad p = 0{,}72$

$P(H > 0{,}7) \geq 0{,}95 \quad 1 - P(H \leq 0{,}7) \geq 0{,}95 \quad P(H \leq 0{,}7) \leq 0{,}05$

$F(0{,}7) \approx \Phi\left(\frac{0{,}7-\mu}{\sigma}\right) \leq 0{,}05$

$\Phi(u) \leq 0{,}05 \iff u \leq u_{0{,}05} = -u_{0{,}95}$

$\Phi\left(\frac{0{,}7-\mu}{\sigma}\right) \leq 0{,}05 \Rightarrow \frac{0{,}7-\mu}{\sigma} \leq -u_{0{,}95}$

$\sqrt{n}\,\frac{0{,}7-p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq -u_{0{,}95} \quad$ mit $p = 0{,}72$

$$\sqrt{n} \geq -u_{0{,}95}\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{0{,}7-p} = u_{0{,}95}\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{p-0{,}7}$$

$$n \geq \left(u_{0{,}95}\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{p-0{,}7}\right)^2 = \left(1{,}645\,\frac{\sqrt{0{,}72 \cdot 0{,}28}}{0{,}02}\right)^2 = 1363{,}8$$

$n \geq 1364$

14.46 X Anzahl weiblicher Personen bei Umfrage

$H = \frac{X}{n}$ Anteil weiblicher Personen bei Umfrage

Für große n ist H näherungsweise $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt

mit $\mu = p$ und $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Es soll gelten $P(p-\delta \leq H \leq p+\delta) \geq 0{,}9$ mit $p = 0{,}4$ und $\delta = 0{,}01$

$P(p-\delta \leq H \leq p+\delta) \approx \Phi(u_2) - \Phi(u_1)$

$$\text{mit} \quad u_2 = \frac{p+\delta-\mu}{\sigma} = \frac{p+\delta-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \sqrt{n}\,\frac{\delta}{\sqrt{p(1-p)}} = u$$

$$\text{und} \quad u_1 = \frac{p-\delta-\mu}{\sigma} = \frac{p-\delta-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = -\sqrt{n}\,\frac{\delta}{\sqrt{p(1-p)}} = -u$$

$\Phi(u) - \Phi(-u) = \Phi(u) - (1 - \Phi(u)) = 2\Phi(u) - 1 \geq 0{,}9$

$\Phi(u) \geq 0{,}95 \quad u \geq u_{0{,}95} \quad \sqrt{n}\,\frac{\delta}{\sqrt{p(1-p)}} \geq u_{0{,}95}$

$$n \geq \frac{u_{0{,}95}^2\, p(1-p)}{\delta^2} \qquad u_{0{,}95} = 1{,}64485 \qquad n \geq 6493{,}3$$

$n \geq 6494$

14.47 a) $P(X \notin [x_1, x_2]) = 0{,}073 \quad P(x_1 \le X \le x_2) = 1 - 0{,}073 = 0{,}927$

$F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}927$

$\Phi\left(\frac{x_2-150}{4}\right) - \Phi(-1{,}5) = \Phi\left(\frac{x_2-150}{4}\right) - \left(1 - \Phi(1{,}5)\right) = 0{,}927$

$\Phi\left(\frac{x_2-150}{4}\right) - 1 + 0{,}9332 = 0{,}927 \quad \Phi\left(\frac{x_2-150}{4}\right) = 0{,}9938$

$\frac{x_2-150}{4} = u_{0{,}9938} = 2{,}5 \quad x_2 = 4 \cdot 2{,}5 + 150 = 160$

b) $P(X \notin [x_1, x_2]) = 1 - P(x_1 \le X \le x_2) = 1 - (F(x_2) - F(x_1))$

$= 1 - \left(\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)\right) = 1 - \left(\Phi(1{,}25) - \Phi(-1{,}25)\right)$

$= 1 - \Phi(1{,}25) + \Phi(-1{,}25) = 1 - \Phi(1{,}25) + 1 - \Phi(1{,}25)$

$= 2 - 2\,\Phi(1{,}25) = 2(1 - \Phi(1{,}25)) = 2(1 - 0{,}8944) = 0{,}2112$

c) $P(X \notin [x_1, x_2]) = 0{,}0456 \quad P(x_1 \le X \le x_2) = 1 - 0{,}0456 = 0{,}9544$

$F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}9544$

$\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right)\right) = 2\,\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}9544$

$\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}9772 \quad \frac{5}{\sigma} = 2 \quad \sigma = \frac{5}{2} = 2{,}5$

d) $P(c_1 \le \overline{X} \le c_2) = F(c_2) - F(c_1) = \Phi\left(\frac{c_2-\mu}{\tilde{\sigma}}\right) - \Phi\left(\frac{c_1-\mu}{\tilde{\sigma}}\right) = 0{,}9544$

mit $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}5}{\sqrt{4}} = 1{,}25 \quad c_2 = \mu + d \quad c_1 = \mu - d$

$\Phi\left(\frac{d}{1{,}25}\right) - \Phi\left(-\frac{d}{1{,}25}\right) = \Phi\left(\frac{d}{1{,}25}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{d}{1{,}25}\right)\right) = 2\,\Phi\left(\frac{d}{1{,}25}\right) - 1 = 0{,}9544$

$\Phi\left(\frac{d}{1{,}25}\right) = 0{,}9772 \quad \frac{d}{1{,}25} = u_{0{,}9772} = 2 \quad d = 1{,}25 \cdot 2 = 2{,}5$

$c_1 = \mu - d = 147{,}5 \quad c_2 = \mu + d = 152{,}5$

e) p Wahrscheinlichkeit, dass Prozess gestoppt wird

$p = P(\overline{X} \notin [c_1, c_2]) = 1 - P(c_1 \leq \overline{X} \leq c_2) = 1 - 0{,}9544 = 0{,}0456$

Anzahl der Stichproben: $n = 10$

Anzahl des Stoppens bei $n = 10$ Stichproben: Y $\quad f(y) = \binom{10}{y} 0{,}0456^{y}\, 0{,}9544^{10-y}$

Y $B(n,p)$-verteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}0456$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - (f(0) + f(1))$

$= 1 - \left[\binom{10}{0} 0{,}0456^{0} \cdot 0{,}9544^{10} + \binom{10}{1} 0{,}0456^{1} \cdot 0{,}9544^{9} \right]$

$= 1 - \left(0{,}9544^{10} + 10 \cdot 0{,}0456 \cdot 0{,}9544^{9} \right) = 0{,}07335$